Politechnika Warszawska | Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa | Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

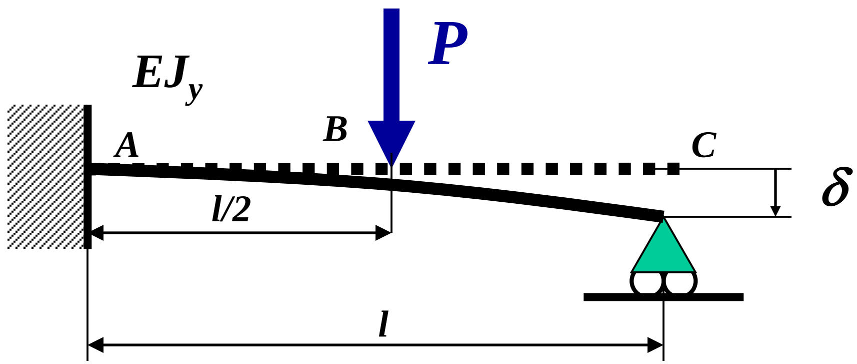
Wykład 9

Konstrukcje prętowe statycznie niewyznaczalne

Obciążenia montażowe i cieplne

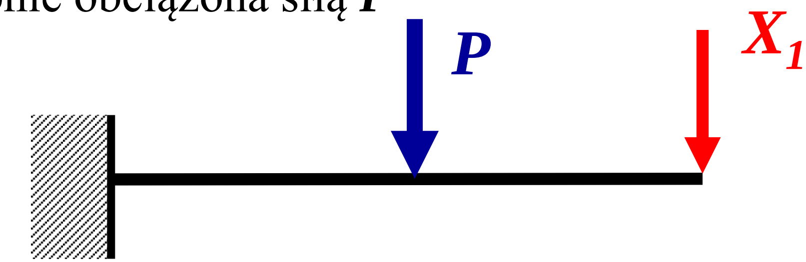
Obciążenia montażowe

Przykład 1: Belka wspornikowa została zamocowana do podpory przegubowej ustalonej z niedokładnością montażową δ a następnie obciążona siłą P



Belka 1 krotnie statycznie niewyznaczalna

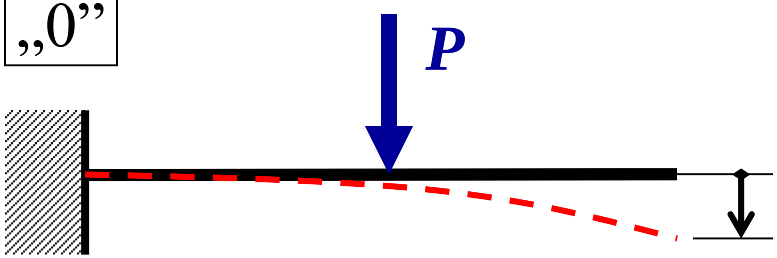
$\equiv$



RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY

SUPERPOZYCJA DWÓCH STANÓW OBCIĄŻENIA:

„0”

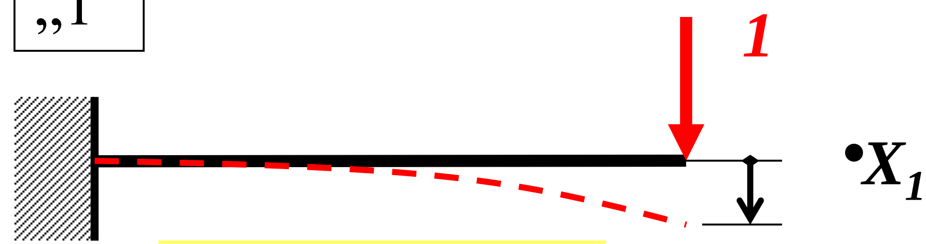


Stan zerowy

α_{10}

$+$

„1”



Stan jednostkowy

α_{11}

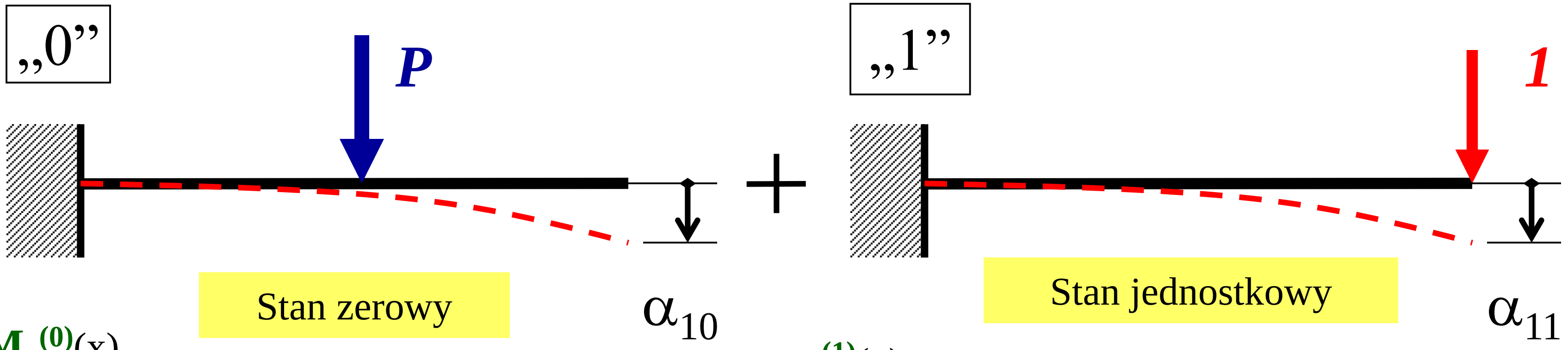
Warunek przemieszczenia na podporze:

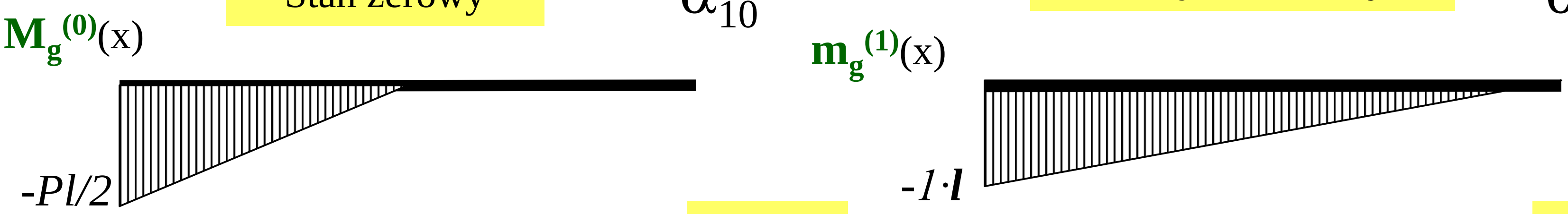
$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 = +\delta$$

Znak „+” bo siła jednostkowa kasuje odchyłkę !

(Przemieszczenie jest zgodne ze zwrotem siły jednostkowej)

Obciążenia montażowe





$$\alpha_{10} \cong \frac{1}{EJ_y}\frac{\frac{1}{2}Pl\cdot\frac{1}{2}l}{2}\cdot\frac{5}{6}l = \frac{5Pl^3}{48EJ_y}$$

$$\alpha_{11} \cong \frac{1}{EJ_y}\frac{l\cdot l}{2}\cdot\frac{2}{3}l = \frac{l^3}{3EJ_y}$$

MOŻLIWE SCENARIUSZE OBCIĄŻENIA:

Sam montaż (P=0):

$$\boxed{\alpha_{11}\cdot X_1 = +\delta} \rightarrow X_1 = \frac{+\delta}{\alpha_{11}} = \frac{3EJ_y\delta}{l^3}$$

Montaż + siła:

$$\boxed{\alpha_{10}+\alpha_{11}\cdot X_1 = +\delta} \rightarrow X_1 = \frac{+\delta-\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = \frac{3EJ_y}{l^3}\left(\delta - \frac{5Pl^3}{48EJ_y}\right)$$

Obciążenia montażowe

Montaż + siła:

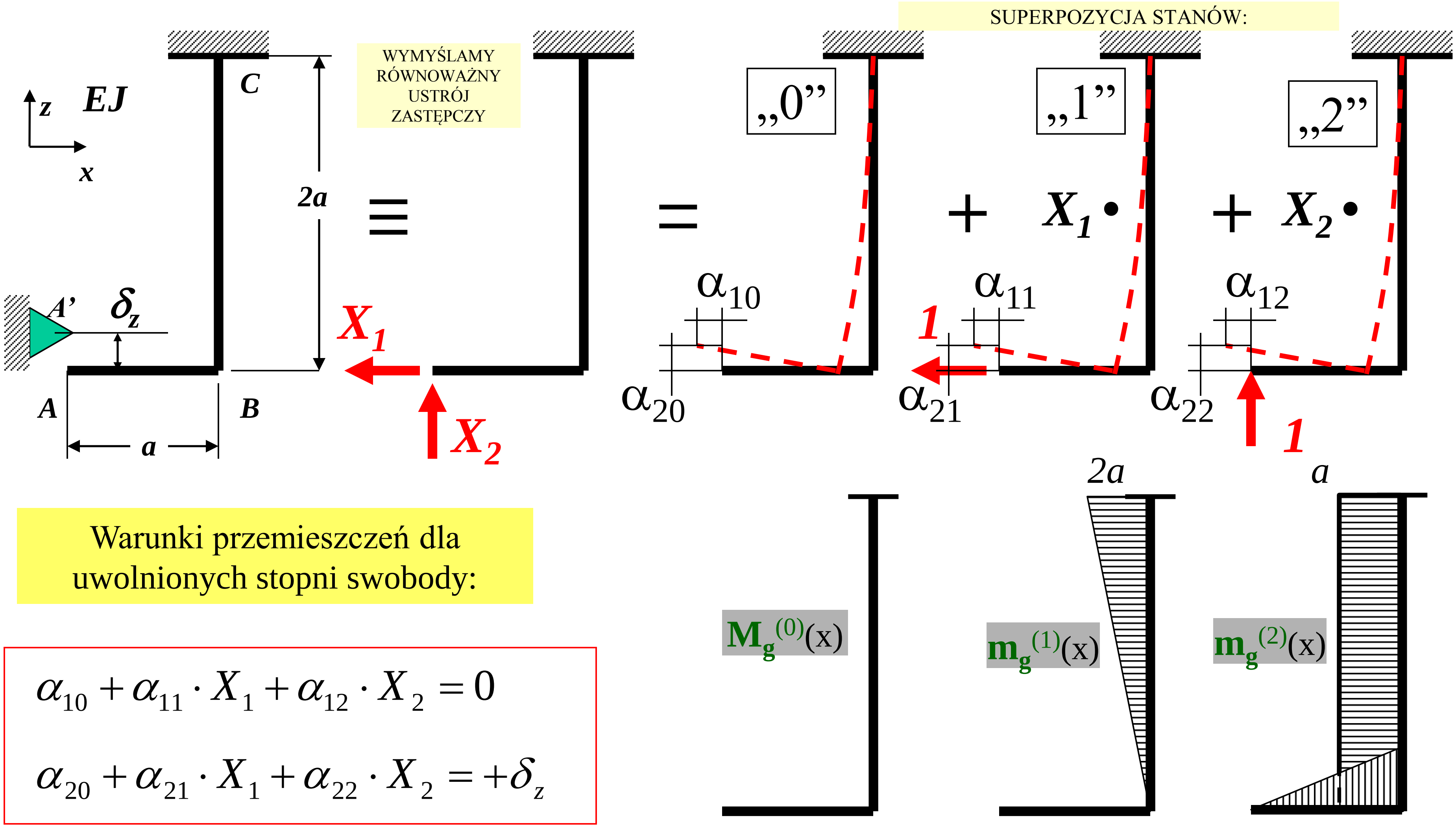
$$\boxed{\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 = +\delta} \rightarrow X_1 = \frac{+\delta - \alpha_{10}}{\alpha_{11}} = \frac{3EJ_y}{l^3}\left(\delta - \frac{5Pl^3}{48EJ_y}\right)$$

Dla jakiej wartości siły $\boldsymbol{P_0}$ nie będzie oddziaływania na podporze?

$$X_1 = \frac{+\delta - \alpha_{10}}{\alpha_{11}} = 0 \rightarrow \delta - \frac{5P_0 l^3}{48EJ_y} = 0 \rightarrow \boxed{P_0 = \frac{48EJ_y\delta}{5l^3}}$$

Obciążenia montażowe

Przykład 2. Rama ściśle płaska, utwierdzona w punkcie C, została podpięta do podpory przegubowej nieprzesuwnej w punkcie A', która jest przesunięta do góry o wartość δ_z względem punktu A.



Warunki przemieszczeń dla uwolnionych stopni swobody:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 + \alpha_{12} \cdot X_2 = 0$$

$$\alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot X_1 + \alpha_{22} \cdot X_2 = +\delta_z$$

Znak „+” bo siła jednostkowa kasuje odchyłkę !
(Przemieszczenie jest zgodne ze zwrotem siły jednostkowej)

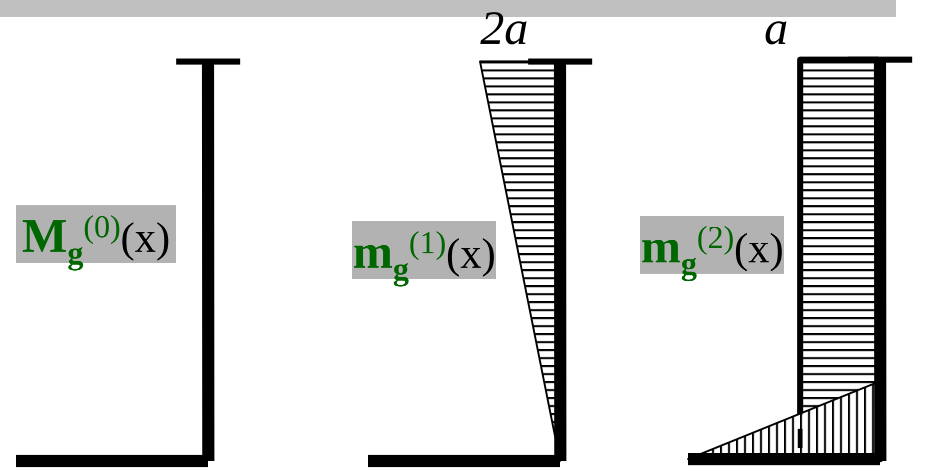
Obciążenia montażowe

Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M

$$\alpha_{11} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(1)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \tfrac{1}{2} (2a)^2 \cdot \tfrac{2}{3} 2a = \frac{8a^3}{3EJ}$$

$$\alpha_{12} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \tfrac{1}{2} (2a)^2 \cdot a = \frac{2a^3}{EJ}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}$$



$$\alpha_{22} \cong \int_l \frac{m^{(2)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left(\tfrac{1}{2} a^2 \cdot \tfrac{2}{3} a + 2a^2 \cdot a \right) = \frac{7a^3}{3EJ}$$

$$\alpha_{10} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot M^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = 0$$

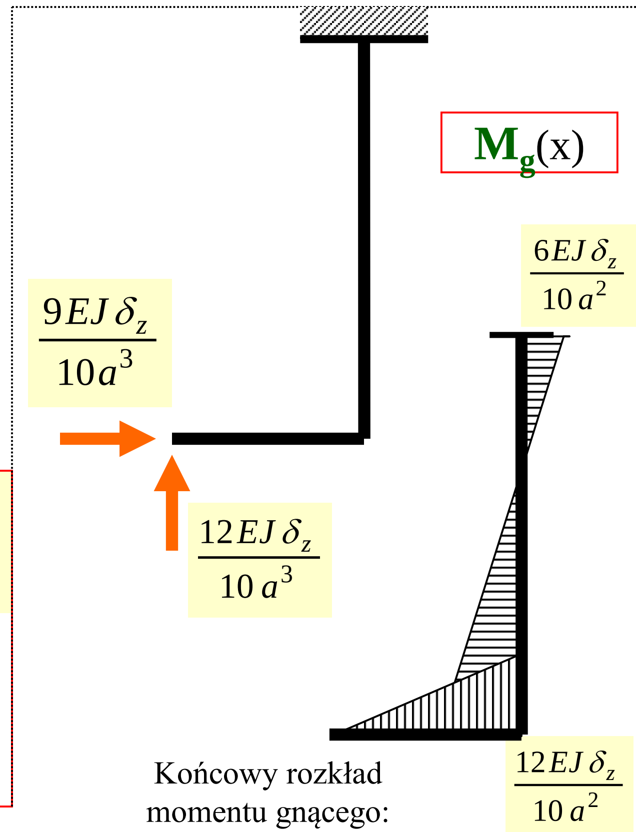
$$\alpha_{20} \cong \int_l \frac{m^{(2)} \cdot M^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = 0$$

$$0 + \frac{8a^3}{3EJ} \cdot X_1 + \frac{2a^3}{EJ} \cdot X_2 = 0$$

$$0 + \frac{2a^3}{EJ} \cdot X_1 + \frac{7a^3}{3EJ} \cdot X_2 = \delta_z$$

$$X_1 = -\frac{9EJ\delta_z}{10a^3}$$

$$X_2 = \frac{12EJ\delta_z}{10a^3}$$



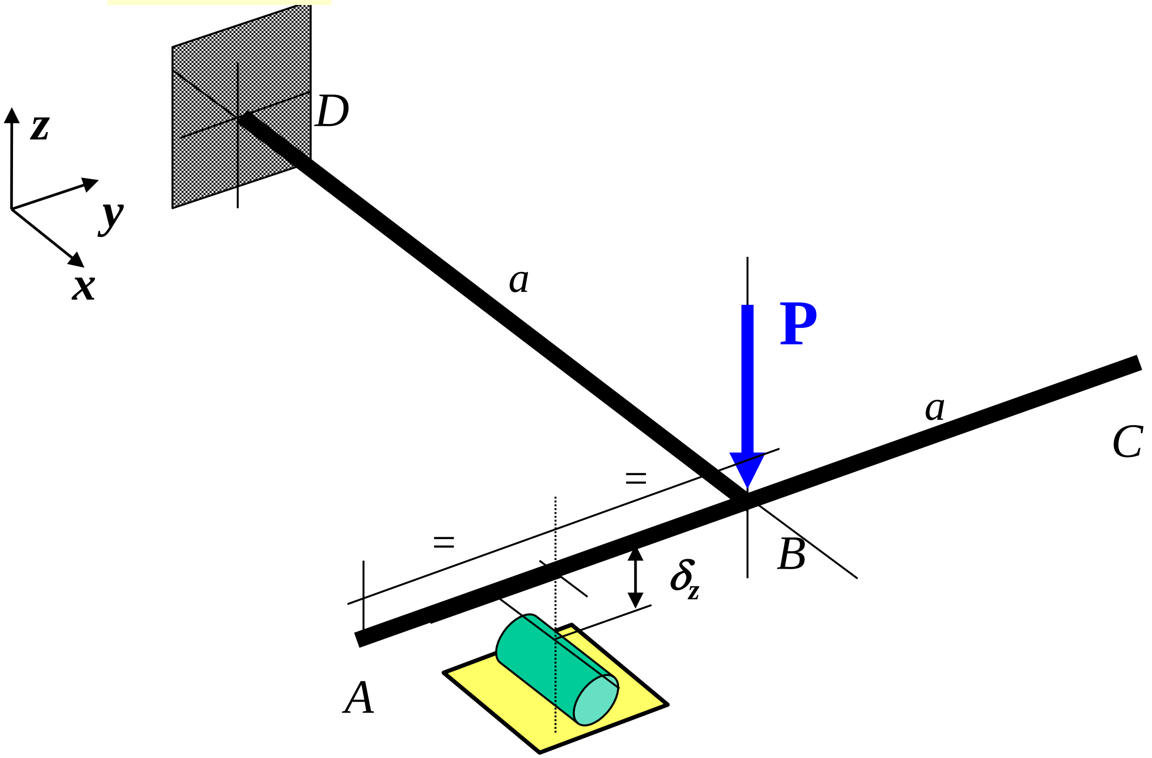
Końcowy rozkład momentu gnącego:

Obciążenia montażowe

Przykład 3. Rama płaska utwierdzona w punkcie D i obciążona niepłasko może wesprzeć się na rolce, która znajduje się w odległości δ_z poniżej pręta AB w połowie jego długości.

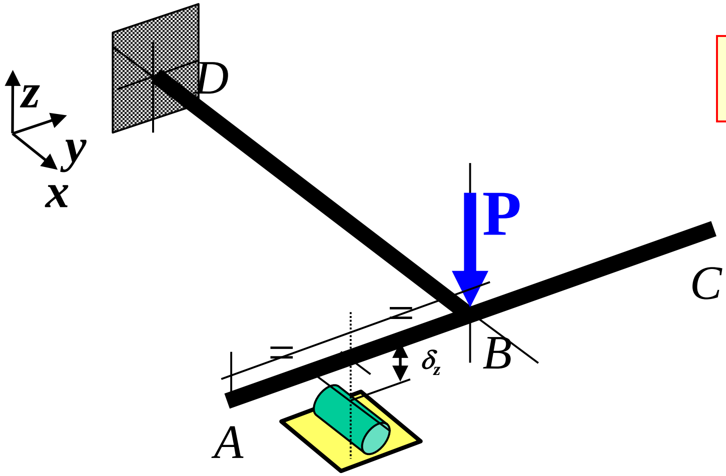
<u>Dane</u>: ***P*, *a*, *d*, $\boldsymbol{\delta_z}$, *E*, *ν***

$$GJ_0 = \frac{10}{13} EJ_y$$



Podczas obciążania zadanie jest statycznie wyznaczalne dopóki rama nie zetknie się z podporą.
Można wyznaczyć wartość siły P_0, przy której rama wejdzie w kontakt z rolką.
Dla $P > P_0$ zadanie stanie się jednokrotnie statycznie niewyznaczalne.

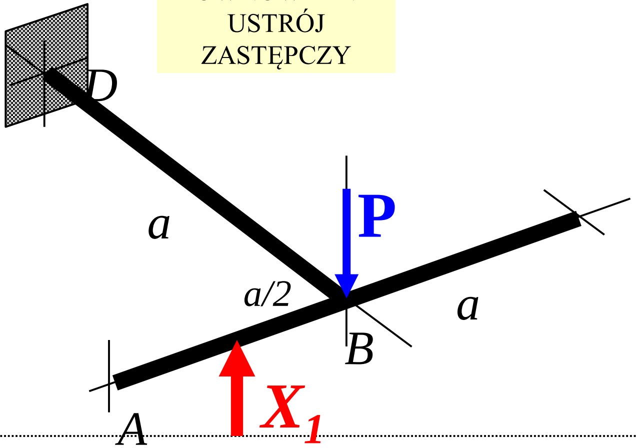
Obciążenia montażowe



Dla $P > P_0$

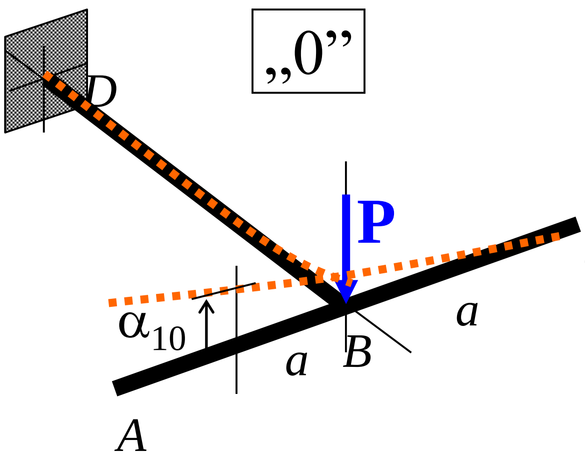
$\equiv$

WYMYŚLAMY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



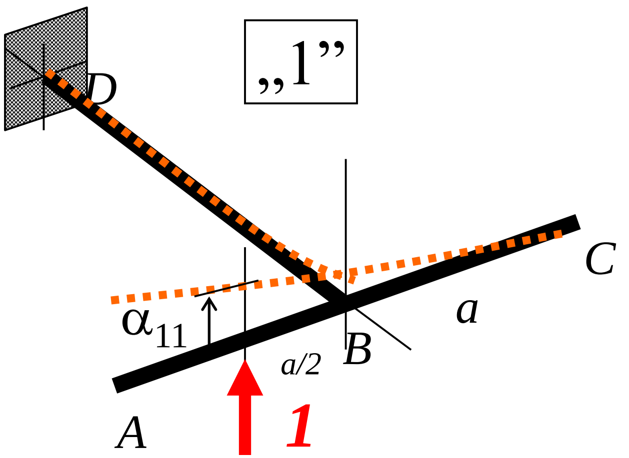
SUPERPOZYCJA STANÓW:

„0"



$+ X_1 \cdot$

„1"



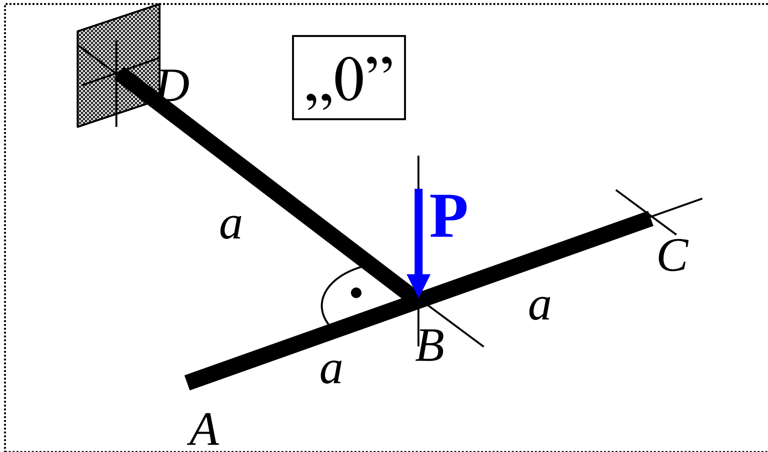
Warunek przemieszczeń na podporze:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 = -\delta_z$$

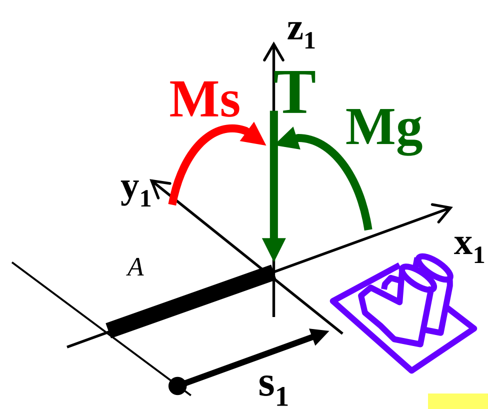
Znak „-" bo siła jednostkowa pogłębia odchyłkę !

(Przemieszczenie jest przeciwne do zwrotu siły jednostkowej)

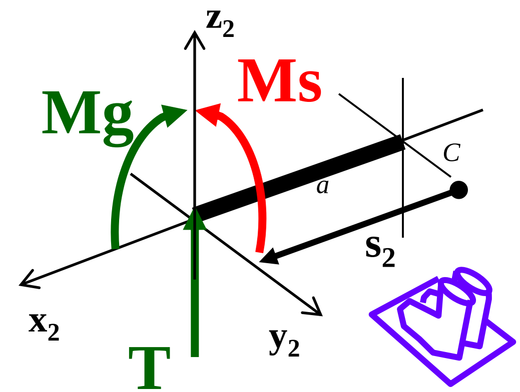
Obciążenia montażowe



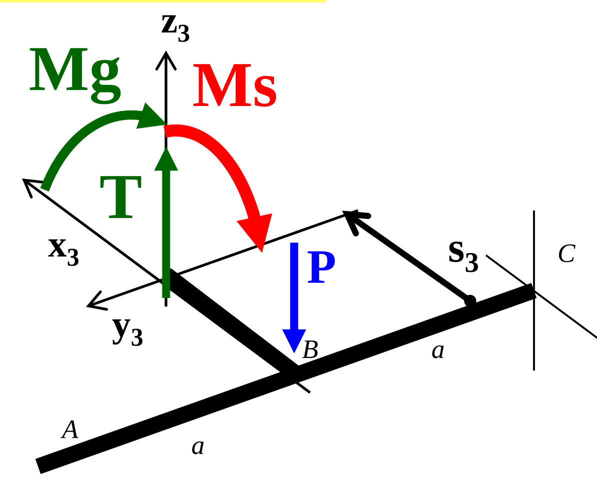
Przedział I (A÷B)



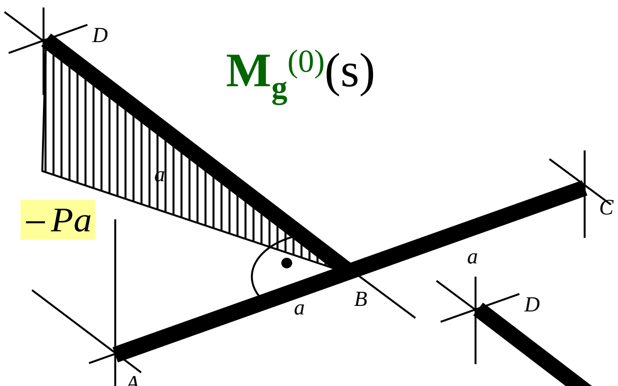
Przedział II (B÷C)

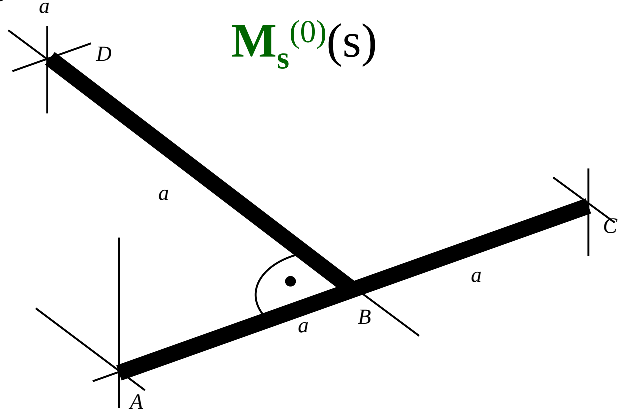


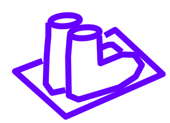
Przedział III (B÷D)



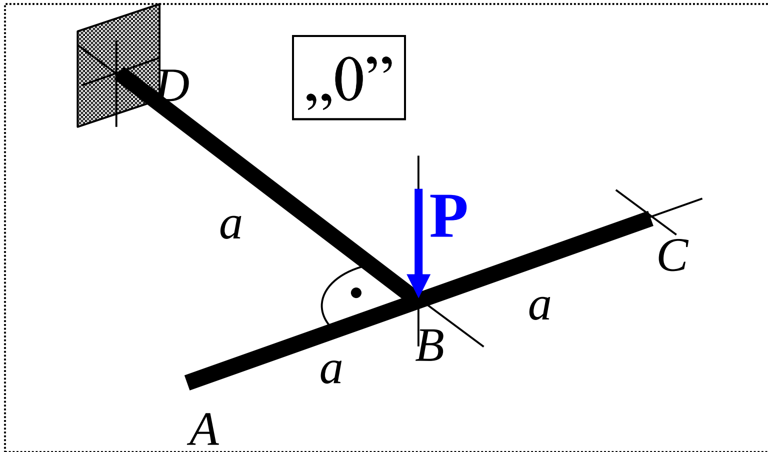
Rozkład momentów gnących i skręcających w stanie „0”:

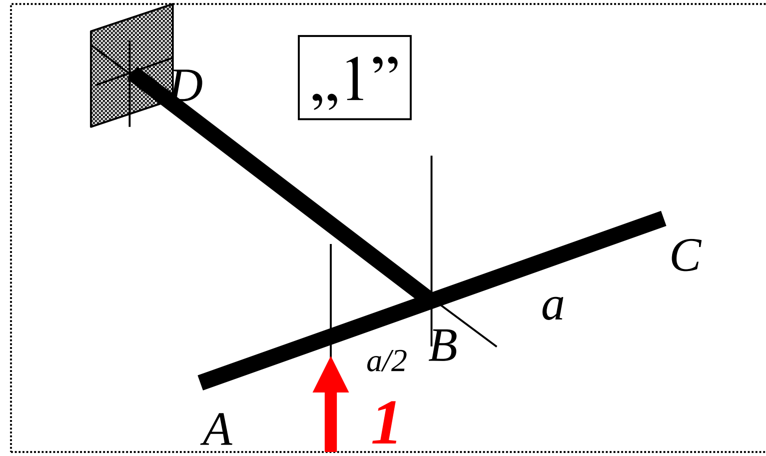


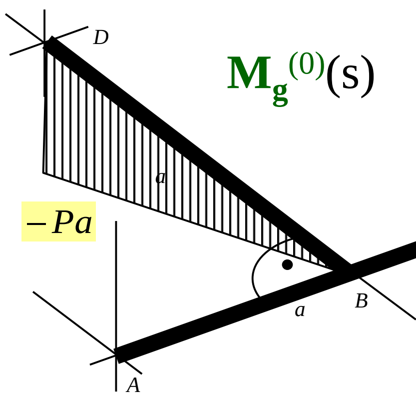


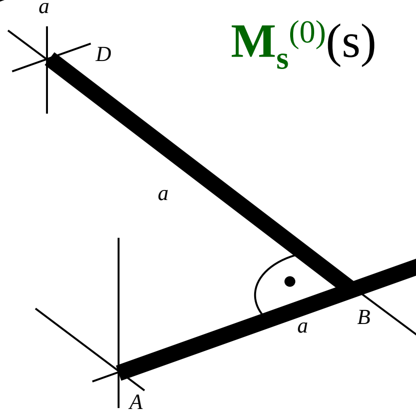


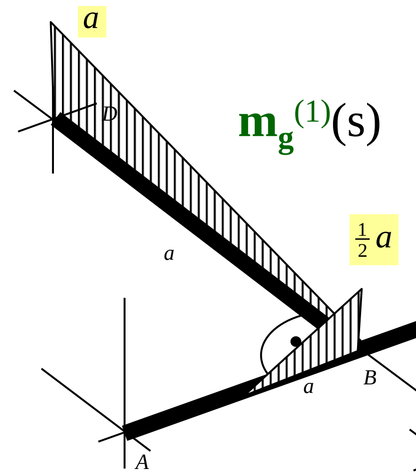
Obciążenia montażowe

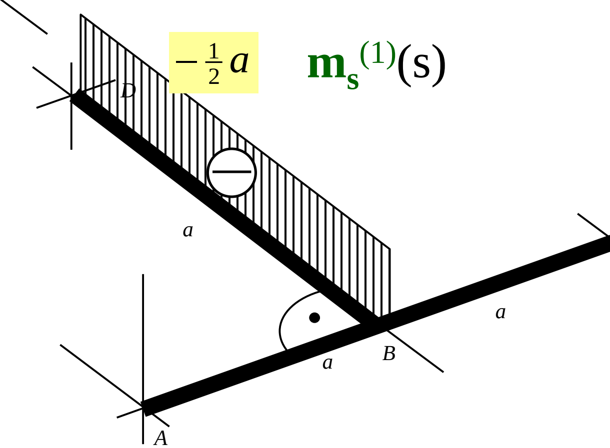




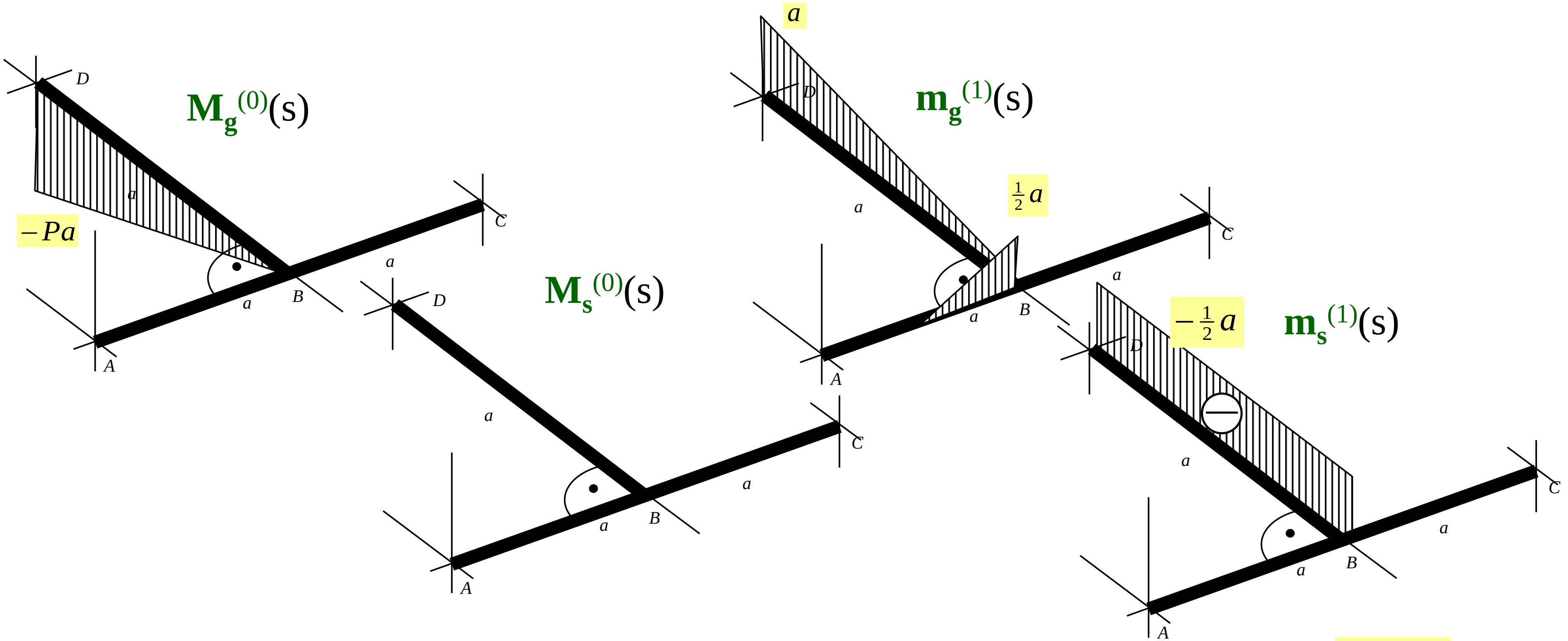








Obciążenia montażowe



$$\alpha_{11} \cong \frac{1}{EJ_y}\left(\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a\right)^2 \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}a\right)\right) + \frac{1}{GJ_s}\left(\frac{1}{2}a\right)^2 \cdot a = \frac{9a^3}{24EJ_y} + \frac{13}{10}\frac{a^3}{4EJy} = \frac{7}{10}\frac{a^3}{EJ_y}$$

$$\alpha_{10} \cong -\frac{1}{EJ_y}\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{2}{3}Pa + \frac{1}{GJ_s} \cdot 0 = -\frac{Pa^3}{3EJ_y}$$

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 = -\delta_z \quad \rightarrow \quad X_1 = -\frac{\alpha_{10} + \delta_z}{\alpha_{11}}$$

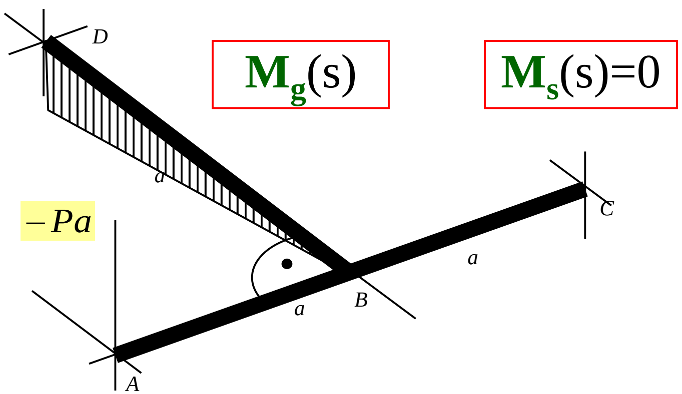
Obciążenia montażowe

$$\alpha_{11} \cong \frac{7}{10}\frac{a^3}{EJ_y} \qquad \alpha_{10} \cong -\frac{Pa^3}{3EJ_y} \qquad \alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 = -\delta_z \qquad \Rightarrow X_1 = -\frac{\alpha_{10} + \delta_z}{\alpha_{11}}$$

MOŻLIWE SCENARIUSZE OBCIĄŻENIA:

A. Pręt nie dotyka do rolki:

$\boldsymbol{P \le P_0}$



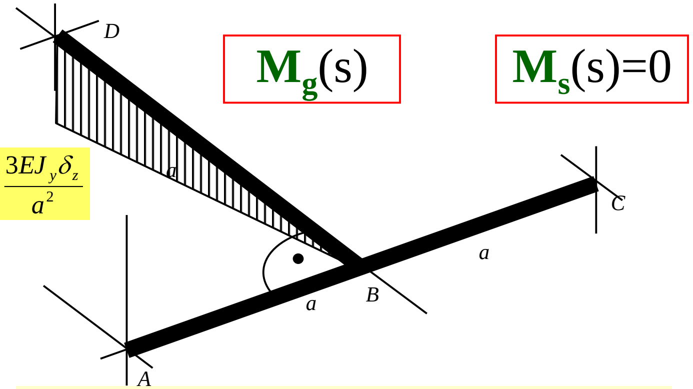
B. Pręt dotknął rolki:

$\boldsymbol{P = P_0 \quad \Leftrightarrow \quad X_1 = 0:}$

$$\alpha_{10} = -\delta_z$$

$$-\frac{P_0 a^3}{3EJ_y} = -\delta_z$$

$$\boxed{P_0 = \frac{3EJ_y\delta_z}{a^3}}$$



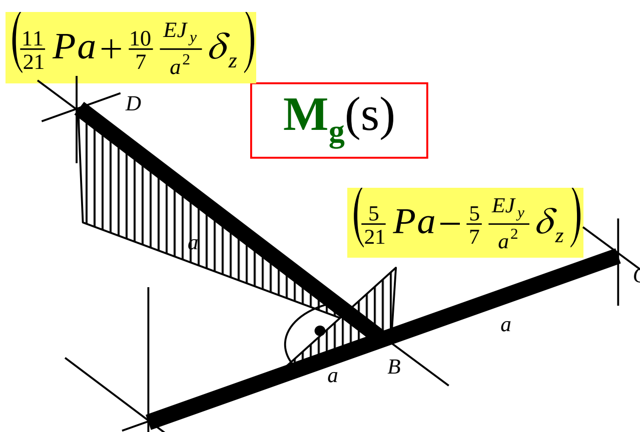
Wartość siły, przy której pręt dotknie rolki

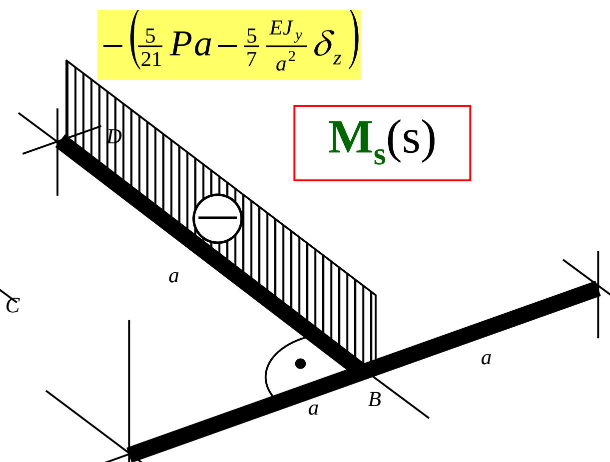
C. Pręt dotknął rolki:

$\boldsymbol{P \ge P_0}$

$$\Rightarrow X_1 = -\frac{\alpha_{10} + \delta_z}{\alpha_{11}}$$

$$\boxed{X_1 = \frac{10}{21}P - \frac{10}{7}\frac{EJ_y}{a^3}\delta_z}$$

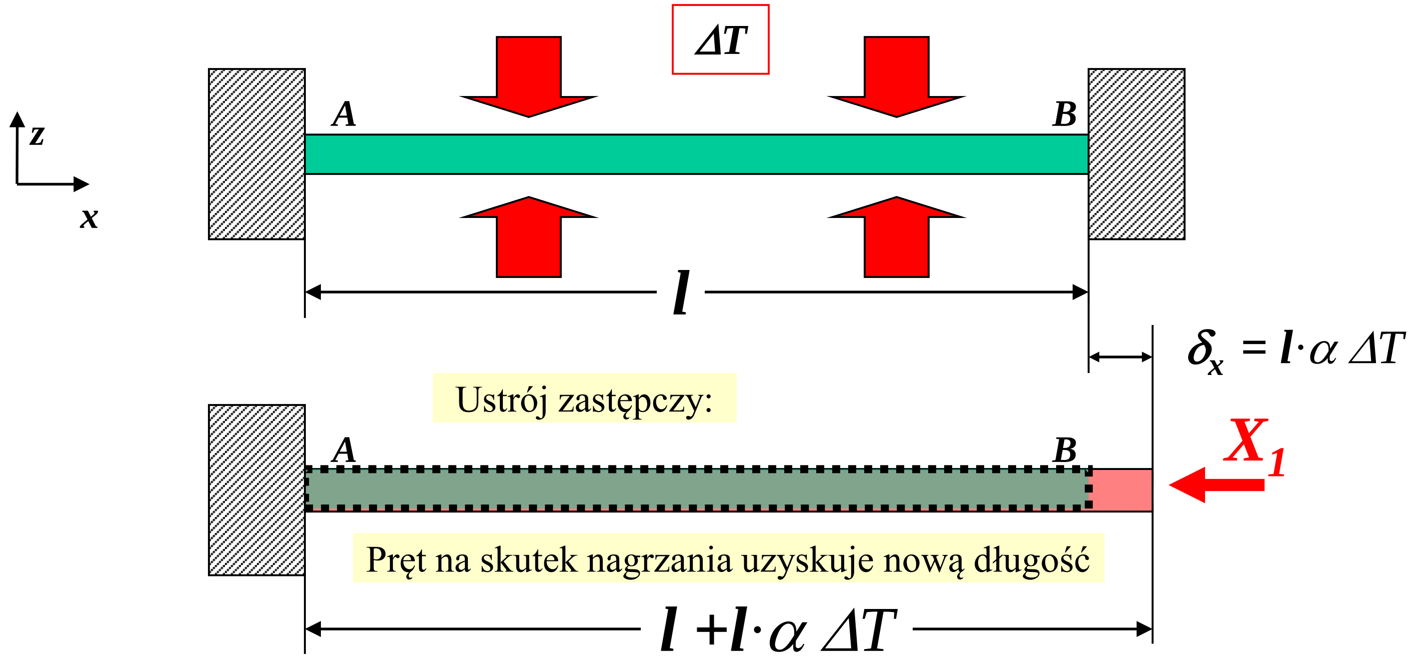




Obciążenia cieplne

Przykład 4. Pręt utwierdzony na obu końcach został podgrzany równomiernie o **ΔT**

Dane: ***l*, *A*, *E*, *α*, *ΔT***



Warunek przemieszczenia na podporze: poszukiwana siła X_1 ściśnie pręt, by „zmieścił" się między podporami

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 = +\delta_x$$

Znak „+" bo siła X_1 kasuje odchyłkę ! *(Przemieszczenie jest zgodne ze zwrotem siły jednostkowej)*

$$\alpha_{10} = 0$$

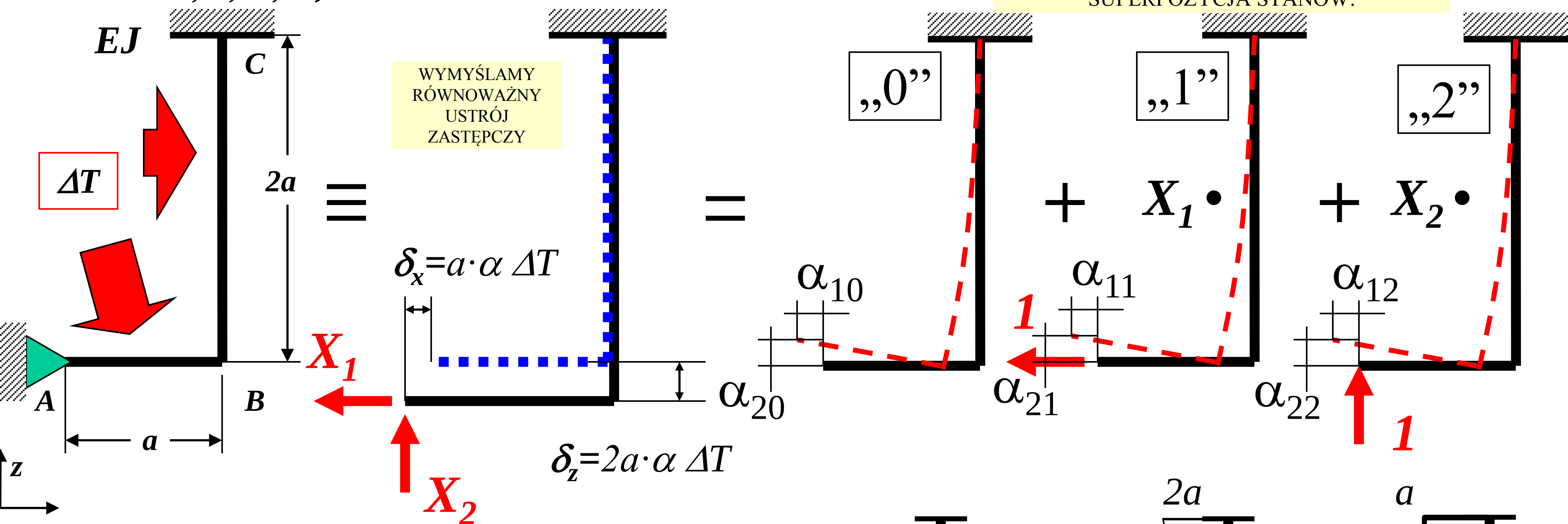
$$\alpha_{11} = \frac{n^{(1)} \cdot n^{(1)} \cdot l}{EA} = \frac{l}{EA}$$

$$X_1 = \frac{EA}{l}\delta_x = \frac{EA}{l} l\,\alpha\,\Delta T = EA\alpha\,\Delta T$$

Obciążenia cieplne

Przykład 5. Rama ściśle płaska, utwierdzona w punkcie C i podpięta do podpory przegubowej nieprzesuwnej w punkcie A została podgrzana równomiernie o **ΔT**

Dane: a, J, E, α, ΔT



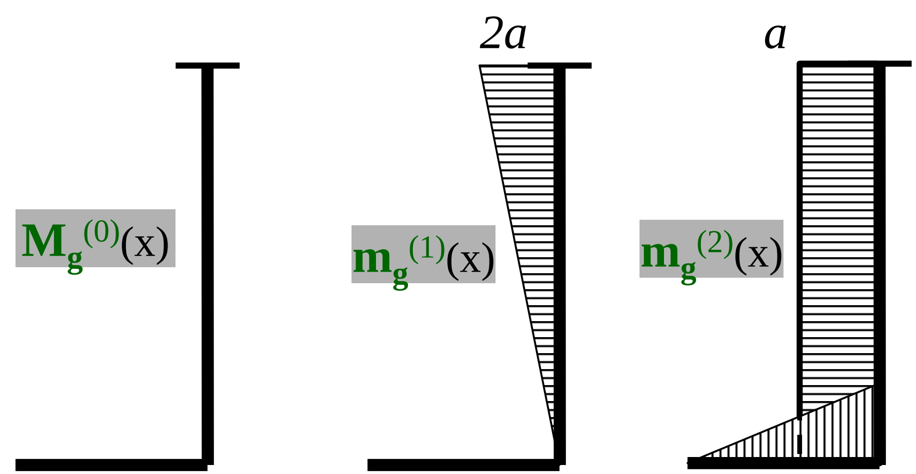
Warunki przemieszczeń dla uwolnionych stopni swobody:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 + \alpha_{12} \cdot X_2 = -\delta_x$$

$$\alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot X_1 + \alpha_{22} \cdot X_2 = +\delta_z$$

Znak „+” gdy siła jednostkowa kasuje odchyłkę !

Znak „-” gdy siła jednostkowa pogłębia odchyłkę !



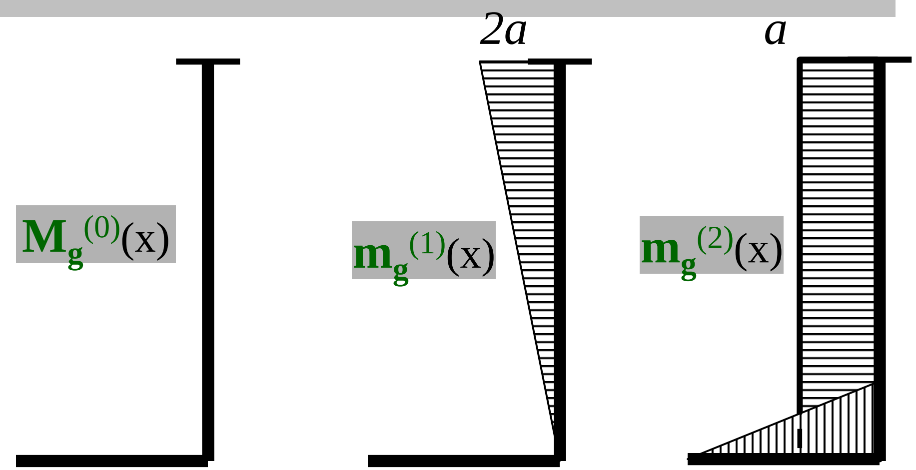
Obciążenia montażowe

Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M
Jak w przykładzie 2

$$\alpha_{11} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(1)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{8a^3}{3EJ} \qquad \alpha_{10} = 0$$

$$\alpha_{12} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{2a^3}{EJ} \qquad \alpha_{20} = 0$$

$$\alpha_{22} \cong \int_l \frac{m^{(2)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{7a^3}{3EJ}$$

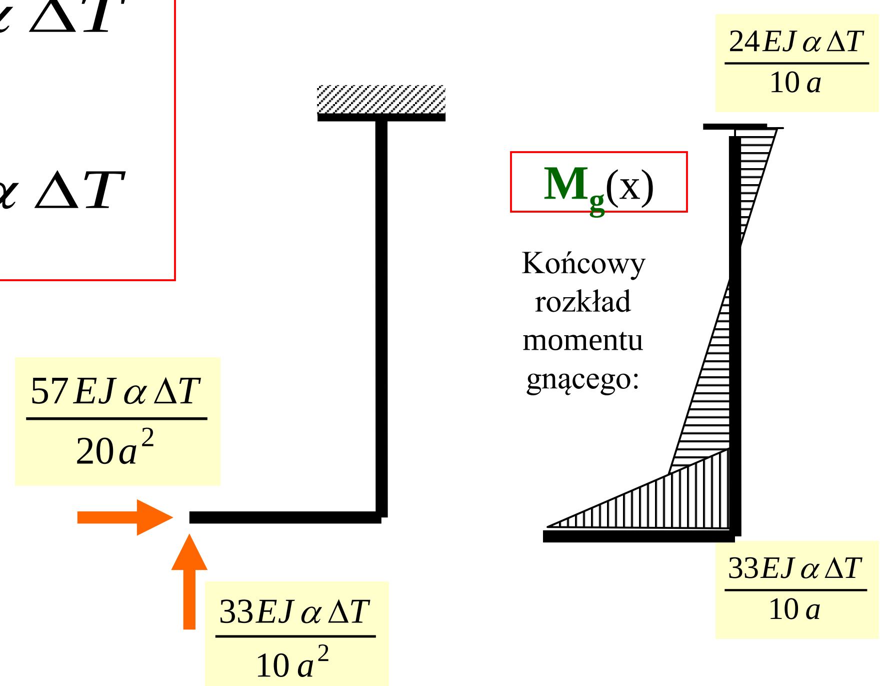


$$0 + \frac{8a^3}{3EJ} \cdot X_1 + \frac{2a^3}{EJ} \cdot X_2 = -a\,\alpha\,\Delta T$$

$$0 + \frac{2a^3}{EJ} \cdot X_1 + \frac{7a^3}{3EJ} \cdot X_2 = +2a\,\alpha\,\Delta T$$

$$X_1 = -\frac{57}{20}\frac{EJ\,\alpha\,\Delta T}{a^2}$$

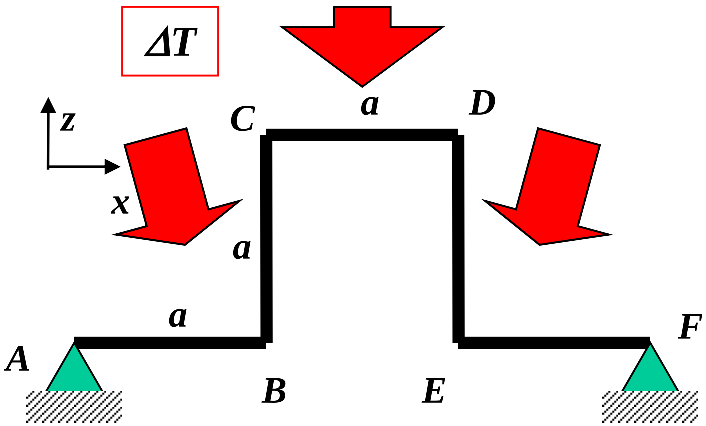
$$X_2 = \frac{33}{10}\frac{EJ\,\alpha\,\Delta T}{a^2}$$



Obciążenia cieplne

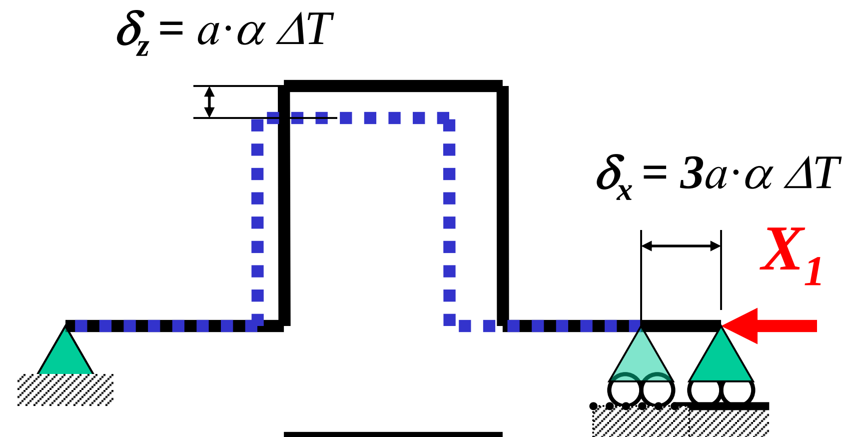
Przykład 6. Rama ściśle płaska, zamocowana na dwóch podporach przegubowych została podgrzana równomiernie o **ΔT**

Dane: a, EJ, α, ΔT



WYMYŚLAMY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY

$\equiv$

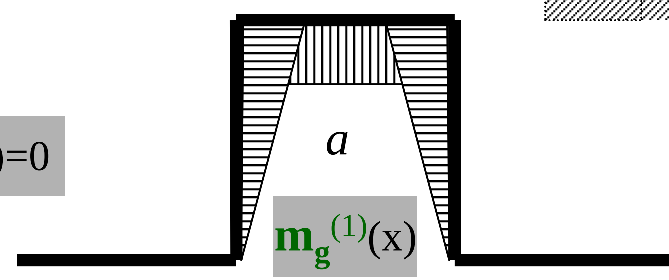


Warunki przemieszczeń dla uwolnionego stopnia swobody:

$$\boxed{\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 = +\delta_x}$$

Znak „+" bo siła jednostkowa kasuje odchyłkę !

$\mathbf{M_g}^{(0)}(x)=0$



$$\alpha_{11} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(1)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ}\left(\tfrac{1}{2}a^2 \cdot \tfrac{2}{3}a \cdot 2 + a^3\right) = \frac{5a^3}{3EJ}$$

$$\alpha_{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = \frac{9}{5}\frac{EJ\,\alpha\,\Delta T}{a^2}$$